№ 4 (16) / 2022
декабрь

УДК
372.853

КАЛИНИНГРАДСКИЙ
ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический
электронный журнал

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

Бодня Александр Владимирович | abodnya@mail.ru
Старший преподаватель кафедры телекоммуникаций
Института физико-математических наук и информационных технологий
Балтийский федеральный университет им. И. Канта
Калининград, Россия

Ньорба Елена Анатольевна | elena.niorba1913@mail.ru
Методист кафедры общего образования
Калининградский областной институт развития образования
Калининград, Россия

Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей

Аннотация. *В данной статье рассматриваются примеры решения и правильного оформления задач повышенного уровня сложности и олимпиадных задач по физике по теме «Разветвление тока. Законы Кирхгофа». Читателю напоминают правила Кирхгофа и знакомят с порядком действий, применяемых при решении задач посредством этих законов. На примере четырех задач происходит подробный поэлементный разбор хода решения с анализом и обоснованием всех этапов решения. Обосновывается необходимость изучения первого и второго законов Кирхгофа в классах физического и инженерного профиля. Отмечаются общие подходы при расчете сопротивлений и токов разветвленных электрических цепей, указывается на необходимость построения эквивалентной схемы и критической оценки полученного числового результата, а также на важность решения сначала в общем (параметрическом) виде. Авторы рассматривают задачи с возможностью как полного аналитического решения, так и численного решения системы линейных уравнений там, где параметрическое решение неоправданно громоздко и может привести к математическим ошибкам. В рассмотренных примерах подробно объясняется алгоритм составления и решения системы уравнений, применение которых оптимально в условиях каждой конкретной задачи.*

Ключевые слова: *законы Кирхгофа, смешанное соединение, измерительный мост, направление обхода.*

Степень освоения курса физики определяется прежде всего умением применять

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический электронный журнал

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

полученные знания к решению задач. Предлагаемые участникам олимпиад задачи, конечно, несколько отличаются от стандартных школьных. Знание материала, изучение которого не предусмотрено школьными программами физики и математики, для решения олимпиадных задач требуется чрезвычайно редко. Однако для их решения необходимо умение строить физические модели, глубокое понимание физических законов, умение самостоятельно применять их в различных ситуациях, а также свободное владение математическим аппаратом (без последнего получение решения большинства физических задач невозможно); эти же умения необходимы для успешного выполнения КИМ ЕГЭ по физике.

Как показывают ЕГЭ по физике и олимпиады разных уровней, около 50 % потерянных учащимися баллов связаны с небрежным оформлением решения и, как следствие, возникновением разного рода ошибок, впоследствии часто принимающих принципиальный характер. Показательным примером возникновения ошибки при написании решения является обозначение разных значений одной физической величины буквой без индекса. Если не употреблять индекс, то буквенные символы становятся неразличимыми, и при последующих математических выкладках легко допустить ошибку, которая делает решение задачи неверным. В плане правильного оформления решения задачи данная статья может служить образцом.

Конечно, экзамен и олимпиада по физике имеют разные цели и проверяют разные умения и навыки, но, как правило, участники олимпиад в дальнейшем выбирают ЕГЭ по физике.

Для выработки у учащихся общего подхода к решению любых физических задач нужно продемонстрировать им этот подход на ряде примеров, в частности, очень подробно обсудить с ними процесс решения некоторых достаточно сложных физических задач. [2, 3].

Согласно обновленным федеральным государственным образовательным стандартам законы Кирхгофа включены в программу профильного курса физики, соответственно, для решения олимпиадных задач (и некоторых заданий контрольно-измерительных материалов ЕГЭ) знание этой темы необходимо, т. к. существенно облегчает решение, поэтому многие учителя (причем не только работающие в классах с углубленным изучением физики — физического и инженерного профиля, где учащиеся нацелены на поступление в рейтинговые вузы) включают эту тему в рабочую программу.

В настоящей статье мы предлагаем рассмотреть проблемы, возникающие у учащихся при решении задач на расчет сопротивлений разветвленных электрических цепей (повышенного уровня сложности и олимпиадных), которые нельзя решить без применения закона Кирхгофа; продемонстрировать алгоритмы и методику составления и решения системы уравнений, применение которых оптимально в условиях каждой конкретной задачи [1, с. 15].

Задача 1. Не все схемы можно рассчитать по формулам последовательного и параллельного соединения резисторов. Это вызывает определенные затруднения у учащихся, разрешить которые поможет изложение методики, приведенное ниже. Самый простой пример — так называемый «Измерительный мост Уитстона» (*рисунок 1*).

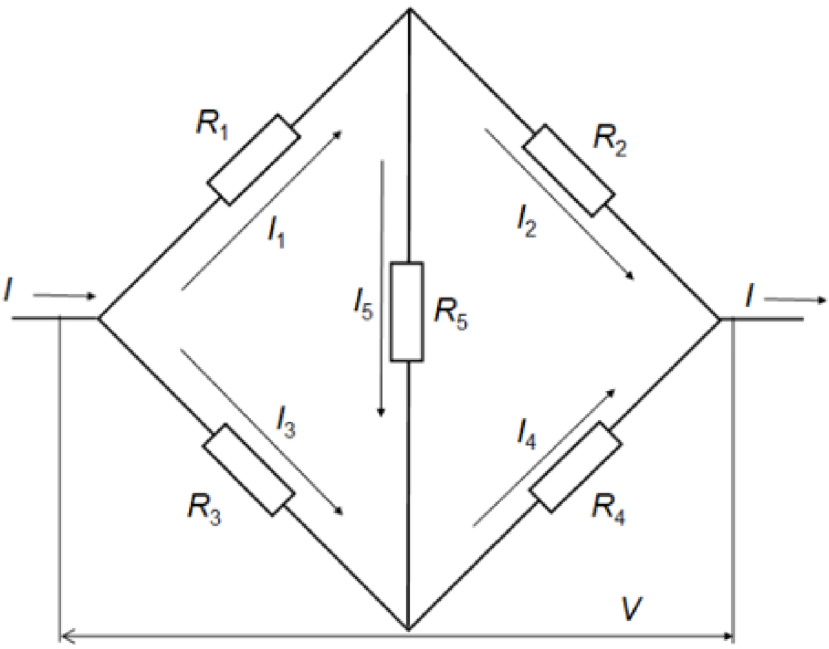

Рисунок 1 — Схема к задаче 1

Задача состоит в том, чтобы вычислить эффективное сопротивление моста *R=U/I*. Для этого нужно записать уравнения Кирхгофа и решить их стандартными методами (найти *I*) для данного *U*.

Решение. Уравнения Кирхгофа для токов имеют вид:

$$I = I_1 + I_3, \qquad I_1 = I_2 + I_5, \qquad I_4 = I_3 + I_5,$$

а уравнения Кирхгофа для напряжений в сочетании с законом Ома имеют вид:

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = U, \qquad R_3 I_3 + R_4 I_4 = U, \qquad R_1 I_1 + R_5 I_5 + R_4 I_4 = U.$$

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

Можно добавить еще уравнений, но они не являются линейно независимыми и следуют из уравнений, написанных выше. Имеется шесть неизвестных, все токи и шесть уравнений, так что система этих линейных уравнений хорошо определена и может быть решена. При определенном старании можно достаточно красиво разрешить эту систему методами, уже известными учащимся. Удивительно, но получается достаточно компактная формула:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_5 + (R_1 + R_3)R_2R_4 + (R_2 + R_4)R_1R_3}{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)R_5 + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}.$$

Для $R_5=0$ можно вставить это значение в формулу выше и получить:

$$R = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}.$$

Для $R_5 \to \infty$ в общей формуле можно пренебречь членами в числителе и знаменателе, не содержащими R_5. После этого R_5 сокращается, и получается:

$$R = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Эти два предела можно рассматривать независимо друг от друга. Для *R5=0* верхние и нижние углы цепи закорочены; таким образом, имеется параллельное соединение резисторов *R1* и *R3* и параллельное соединение резисторов *R2* и *R4*. Эти две группы резисторов соединены последовательно. Поэтому:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}} + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}} = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2 + R_4}.$$

Для $R_5 \to \infty$ резистора R_5 в схеме просто нет. Тогда у нас есть резисторы R_1 и R_2, соединенные последовательно; то же самое для R_3 и R_4, и эти две группы соединены параллельно. Таким образом, получается:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

Еще одна особенность моста Уитстона заключается в следующем. Если $R_1=R_3$ и $R_2=R_4$, схема является симметричной (что визуально можно представить как пропорциональность ветвей цепи) относительно центральной горизонтальной линии. Обычно учащиеся достаточно легко обнаруживают данный мост в сложных цепях и рассчитывают по приведенным окончательным формулам, к сожалению, не владея методикой расчета. В этом случае ток через R_5 не течет, и R_5 можно удалить (сделать обрыв или закоротить его на месте). Тогда получается:

$$R = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Что также следует из всех приведенных выше формул как частный случай. Аналогичным образом можно рассматривать и более сложные электрические цепи. Как правило, систему линейных уравнений приходится решать численно, так как в некоторых случаях аналитическое решение становится слишком громоздким.

Задача 2. Ток через резистор 20 Ω (*рисунок 2*) не изменяется, независимо от того, разомкнуты или замкнуты оба переключателя — S_1 и S_2. Используйте эту подсказку, чтобы определить значение неизвестного сопротивления R.

Решение. Это задание было представлено на одной из международных олимпиад и требовало знания обобщения закона Ома для полной (замкнутой) цепи до второго закона Кирхгофа, что предоставляло большую прозрачность в понимании хода решения.

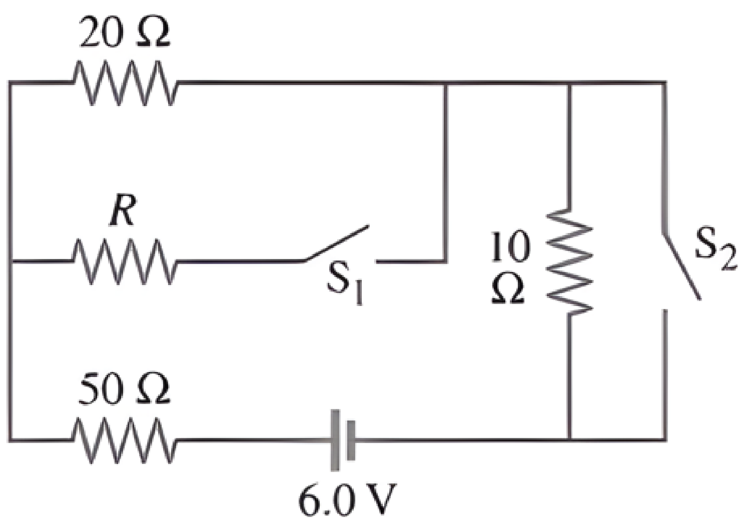

Рисунок 2 — Схема к задаче 2

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

Не перерисовывая схему с общими обозначениями резисторов, можно записать уравнения следующим образом. Для обоих переключателей в разомкнутом состоянии:

$$(R_{50}+R_{20}+R_{10})I=\mathcal{E}, \qquad I_{20}=I.$$

Для обоих переключателей, замкнутых на общий ток *I*, имеем:

$$\left(R_{50}+\frac{1}{\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R}}\right)I=\mathcal{E}.$$

Напряжение U_R на группе параллельных резисторов R_{20} и R:

$$U_R=\frac{1}{\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R}}\times I=\frac{1}{\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R}}\times\frac{\mathcal{E}}{R_{50}+\frac{1}{\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R}}}=\frac{\mathcal{E}}{R_{50}\left(\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R}\right)+1}.$$

Ток I_{20} найдем по формуле:

$$I_{20}=\frac{U_R}{R_{20}}=\frac{\mathcal{E}}{R_{50}\left(\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R}\right)+1}\times\frac{1}{R_{20}}.$$

Это уравнение для *R*. Сокращаем $\mathcal{E}$ и упрощаем дроби, получаем:

$$\left(R_{50}\left(\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R}\right)+1\right)R_{20}=R_{50}+R_{20}+R_{10}.$$

Затем:

$$R_{20}R_{50}\left(\frac{1}{R_{20}}+\frac{1}{R}\right)=R_{50}+R_{10}.$$

И:

$$\frac{1}{R}=-\frac{1}{R_{20}}+\frac{R_{50}+R_{10}}{R_{20}R_{50}}=\frac{1}{R_{20}}\left(-1+\frac{R_{50}+R_{10}}{R_{50}}\right)=\frac{-R_{50}+R_{50}+R_{10}}{R_{20}R_{50}}=\frac{R_{10}}{R_{20}R_{50}}.$$

Наконец, получаем простое и красивое итоговое соотношение:

$$R=\frac{R_{20}R_{50}}{R_{10}}=\frac{20\times 50}{10}=100\,\Omega.$$

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

Задача 3. Найдите токи и напряжения для каждого из трех резисторов в данной цепи (*рисунок 3*).

Решение. Это задание несколько более высокого уровня и требует большей последовательности и точности в применении законов Кирхгофа. Ниже приводим подробный разбор расчета цепи, который можно предложить учащимся, в том числе и для самостоятельной проработки.

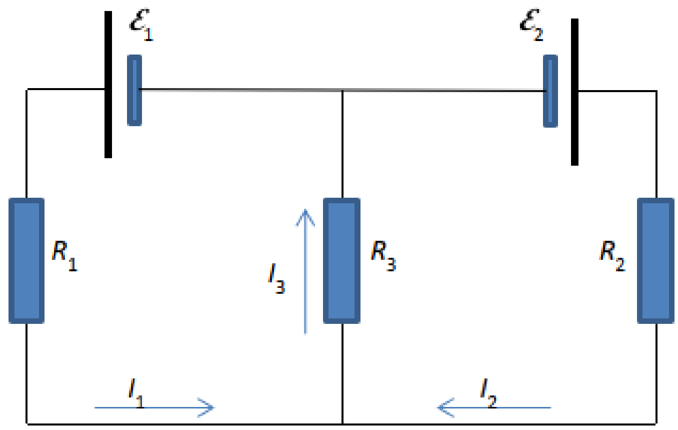

Рисунок 3 — Схема к задаче 3

Выберите положительные направления токов в соответствии с направлениями ЭДС[1] батарей. Согласно первому закону Кирхгофа (заряды не накапливаются в узлах):

$$I_3 = I_1 + I_2\,.$$

Второй закон Кирхгофа гласит, что для каждого замкнутого контура сумма напряжений в цепи равна нулю, что отражает тот факт, что электрические потенциалы определяются однозначно (и работа электрического поля над каждой замкнутой траекторией равна нулю):

$$\sum_i U_i = 0\,.$$

К законам Кирхгофа нужно добавить закон Ома

$$U_i = R_i I_i$$

для каждого резистора. Кроме того, внутри резисторов может действовать

[1] Электродвижущая сила.

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

ЭДС (батареи имеют свое собственное внутреннее сопротивление и, следовательно, могут рассматриваться как резисторы) и пропускать через них ток. С ЭДС закон Ома становится:

$$U_i + \mathcal{E}_i = R_i I_i \,.$$

Подставляя $U_i = R_i I_i - \mathcal{E}_i$ во второй закон Кирхгофа, получаем:

$$\sum_i R_i I_i = \sum_i \mathcal{E}_i \,.$$

В приведенной выше схеме мы пренебрегаем внутренними сопротивлениями батарей. Приведенный выше закон Кирхгофа-Ома для левой и правой петель становится:

$$R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_2) = \mathcal{E}_1;$$
$$R_2 I_2 + R_3(I_1 + I_2) = \mathcal{E}_2.$$

Это система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которая имеет решение. Чтобы решить эту систему уравнений наиболее элегантным способом, можно сначала переписать ее в виде слагаемых с I_1 и I_2:

$$(R_1 + R_3)I_1 + R_3 I_2 = \mathcal{E}_1;$$
$$R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2 = \mathcal{E}_2.$$

Затем можно исключить, скажем, I_2, умножив первое уравнение на R_2+R_3, второе уравнение на R_3, а затем вычитая второе уравнение из первого. Это дает:

$$(R_1 + R_3)(R_2 + R_3)I_1 - R_3^2 I_1 = (R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 - R_3\mathcal{E}_2.$$

Отсюда найдем:

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 - R_3\mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)R_3}.$$

Поскольку эта схема симметрична, можно получить формулу для I_2 без вычислений, просто заменив 1 → 2, 2 → 1. Это дает:

$$I_2 = \frac{(R_1 + R_3)\mathcal{E}_2 - R_3\mathcal{E}_1}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2)R_3}.$$

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

Тогда:

$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{R_2\mathcal{E}_1 + R_1\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + (R_1 + R_2)R_3}.$$

Напряжения на трех резисторах теперь можно найти по закону Ома. Можно видеть, что токи могут течь как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Например, если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, то оба тока положительны. Если $\mathcal{E}_1$ достаточно сильнее, чем $\mathcal{E}_2$ (определите точное условие!), то $I_1>0$, но $I_2<0$. Если $\mathcal{E}_2$ достаточно сильнее, чем $\mathcal{E}_1$, то $I_2>0$, но $I_1<0$.

В частном случае $R_3=0$ (короткое замыкание) существуют две независимые цепи, для которых получается:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_2},$$

это следует из приведенных выше формул, если установить $R_3=0$. Это обеспечивает проверку полученных формул.

Если удалить R_3, останется только один цикл, для которого будет получен:

$$I_1 \equiv I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}.$$

Этот результат следует из предела $R_3 \to \infty$ следующим образом:

$$I_1 = \frac{(R_2/R_3 + 1)\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1R_2/R_3 + R_1 + R_2} \to \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2}$$

(отбрасываются члены, содержащие R_3 в знаменателе). Это еще одна проверка нашего главного результата.

Задача 4. Наконец, последнее задание по расчету цепей методом законов Кирхгофа, успешное овладение которым можно считать положительным итогом обучения по этой теме законов постоянного тока.

Для схемы (*рисунок 4*) определите (a) ток через 14 V батарею и (b) разность потенциалов между точками a и b, U_a-U_b.

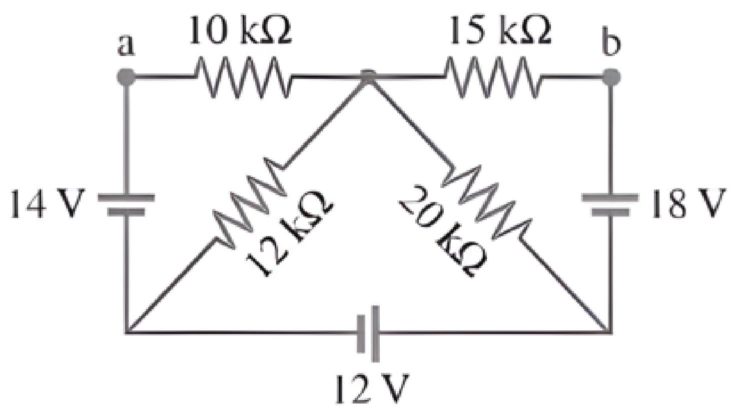

Рисунок 4 — Схема к задаче 4

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

Решение. Для решения задач по расчету цепей необходимо объяснить учащимся, чтобы предварительно был сделан рисунок эквивалентной цепи либо рисунок, упрощающий данную в задании цепь. Трудность в представлении эквивалентных (упрощенных) цепей связана с недостаточным пространственным воображением учащихся и снимается многочисленными примерами и упражнениями, в чем во многом, собственно, и заключается один из методов обучения. Чтобы использовать алгебру, сначала мы вводим обозначения для резисторов и токов, делая еще один набросок схемы, стараясь выбрать обозначения как можно более симметричные (*рисунок 5*).

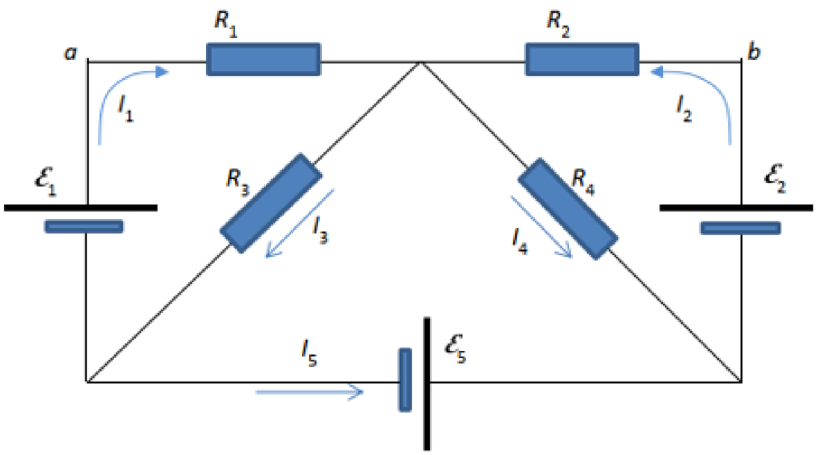

Рисунок 5 — Эквивалентная схема

Во-первых, можно исключить I_3 и I_4 исходя из 1-го закона Кирхгофа:

$$I_3 = I_1 + I_5, \qquad I_4 = I_2 - I_5.$$

Тогда можно записать 2-й закон Кирхгофа в сочетании с обобщенным законом Ома для трех контуров: $\mathcal{E}_1 R_1 R_3, \mathcal{E}_2 R_2 R_4$, и $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_5 R_2 R_1$ (против часовой стрелки). Получаем:

$$\begin{gathered} R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_5) = \mathcal{E}_1; \\ R_2 I_2 + R_4(I_2 - I_5) = \mathcal{E}_2; \\ -R_1 I_1 + R_2 I_2 = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_5. \end{gathered}$$

В третьем уравнении перед $R_1 I_1$ и $\mathcal{E}_1$ стоит знак минус, потому что мы движемся против часовой стрелки в направлении, противоположном выбранному положительному направлению I_1 и против ЭДС первой батареи. Имеются три уравнения для трех неизвестных, токи I_1, I_2 и I_5. Эти уравнения близки к симметричным (за исключением минусов). Первый шаг в решении этой системы уравнений состоит в том, чтобы сгруппировать члены с одинаковыми токами в первых двух уравнениях:

$$\begin{gathered} (R_1 + R_3) I_1 + R_3 I_5 = \mathcal{E}_1; \\ (R_2 + R_4) I_2 - R_4 I_5 = \mathcal{E}_2; \\ -R_1 I_1 + R_2 I_2 = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_5. \end{gathered} \tag{1}$$

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

Теперь можно исключить I_1 и I_2 из первых двух уравнений

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - R_3 I_5}{R_1 + R_3}, \qquad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 + R_4 I_5}{R_2 + R_4}, \tag{2}$$

и подставить это выражение в третье уравнение:

$$-R_1 \frac{\mathcal{E}_1 - R_3 I_5}{R_1 + R_3} + R_2 \frac{\mathcal{E}_2 + R_4 I_5}{R_2 + R_4} = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_5.$$

Перегруппировав члены, получим:

$$\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} I_5 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} I_5 = \frac{R_1}{R_1 + R_3} \mathcal{E}_1 - \frac{R_2}{R_2 + R_4} \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_5.$$

С правой стороны можно добавить аналогичные члены, что дает:

$$\left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} I_5 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} I_5\right) = -\frac{R_3}{R_1 + R_3} \mathcal{E}_1 + \frac{R_4}{R_2 + R_4} \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_5.$$

Наконец,

$$I_5 = \frac{-\frac{R_3}{R_1 + R_3} \mathcal{E}_1 + \frac{R_4}{R_2 + R_4} \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_5}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}.$$

Проверим размерность ввиду громоздкости полученной формулы:

$$[\mathrm{I}] = \left(\frac{\text{Ом} \times \text{В}}{\text{Ом} + \text{Ом}} + \frac{\text{Ом} \times \text{В}}{\text{Ом} + \text{Ом}} + \text{В}\right) \Big/ \left(\frac{\text{Ом} \times \text{Ом}}{\text{Ом} + \text{Ом}} + \frac{\text{Ом} \times \text{Ом}}{\text{Ом} + \text{Ом}}\right) = \frac{\text{В}}{\text{Ом}} = \text{А}.$$

Токи I_1 и I_2 можно найти, подставив это выражение в формулы для I_1 и I_2 выше в уравнении (2). Однако формулы для I_1 и I_2 становятся слишком громоздкими, и поэтому нет смысла их записывать. На этом этапе числа можно подставить в формулы. Это один из методов представления решения — так называемое решение по частям, что довольно часто применяется для сложных заданий в контрольно-измерительных материалах экзаменов и олимпиад. Тогда получаем:

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

$$I_5 = \frac{-\frac{12}{10+12}14 + \frac{20}{15+20}18 + 12}{\frac{10\times 12}{10+12} + \frac{15\times 20}{15+20}}10^{-3} = \frac{47}{45}10^{-3}\,A \approx 1.0444\times 10^{-3}\,A;$$

$$I_1 = \frac{14-12\frac{47}{45}}{10+12}10^{-3} = \frac{1}{15}10^{-3}\,A \approx 0.0666\times 10^{-3}\,A = 0.667\times 10^{-4}\,A;$$

$$I_2 = \frac{18+20\frac{47}{45}}{15+20}10^{-3} = \frac{10}{9}10^{-3}\,A \approx 1.1111\times 10^{-3}\,A.$$

На данном этапе вычисление по частям снимает еще один вопрос для представления решения на экзамене — подстановку числовых значений в итоговые уравнения, что оценивается отдельными баллами. Коэффициент 10^{-3} возникает из-за того, что сопротивления находятся в kΩ. Можно видеть, что все токи положительные; таким образом, все они текут в направлениях, показанных на рисунке, хотя I_1 аномально мал. Последний представляет собой ток, проходящий через батарею напряжением 14 V. Наконец, напряжение между точками *a* и *b* на чертеже равно:

$$U_a - U_b = R_1 I_1 - R_2 I_2.$$

Здесь знак минус возникает потому, что мы перемещаемся от *a* к *b* через резистор R_2 в направлении, противоположном выбранному положительному направлению тока I_2. Т. к. I_1 аномально мал, в напряжении доминирует второй член и оно отрицательное, то есть U_a меньше, чем U_b. Численно

$$U_a - U_b = 10\frac{1}{5} - 15\frac{10}{9} = -16\text{В}.$$

Решение задач целесообразно проводить в общем (алгебраическом) виде, стремясь выразить искомую величину через величины, заданные в условии задачи. При этом для уяснения физической основы задачи, поиска ее рационального решения и упрощения промежуточных выкладок можно смело вводить буквенные обозначения новых величин (параметров). При правильно проведенных математических преобразованиях введенные новые параметры сократятся. После получения решения задачи в общем виде необходимо убедиться в его правильности. С этой целью целесообразно провести анализ решения и проверить размерность выведенной зависимости. После вычисления необходимо проверить, соответствует ли численный результат искомой величины физическому явлению и не противоречит ли он здравому смыслу.

Список литературы

1. Всероссийские олимпиады по физике, 1992–2004 / А. Н. Варгин [и др.]; под науч. ред. С. М. Козела, В. П. Слободянина. — М.: Вербум-М, 2005. — 531 с.

Бодня А. В., Ньорба Е. А. Решение задач повышенного уровня сложности на расчет параметров разветвленных электрических цепей // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 4 (16) / декабрь. — С. 42-54. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/26dec2022/kvo104/

2. Задачи Московских городских олимпиад по физике, 1986–2005 / С. Д. Варламов [и др.]. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МЦНМО, 2007. — 695 с.
3. Мусин, А. И. Методы решения задач с разветвленными электрическими цепями [Электронный ресурс] / А. И. Мусин, М. Ю. Осипова // Школьная педагогика. — 2022. — № 3. — URL: https://moluch.ru/th/2/archive/222/7209/ (дата обращения: 29.10.2022).

Alexander V. Bodnya
Immanuel Kant Baltic Federal University
Kaliningrad, Russia

Elena A. Niorba
Kaliningrad Regional Institute
of the educational development
Kaliningrad, Russia

Solving tasks of the increased level of complexity for calculating parameters of branched electrical circuits

Abstract. *This article discusses the examples of solving and correctly designing tasks of the increased level of complexity and Olympiad ones in Physics on the theme "Current branching. Kirchhoff's Laws". The reader is reminded of Kirchhoff's laws and introduced to the procedure used in solving tasks by means of these laws. Using the example of four tasks, the detailed element-by-element analysis of the way of the solution is carried out with the analysis and justification of all stages of the solution. The necessity of studying the first and second Kirchhoff's laws in physical and engineering classes is substantiated. General approaches are noted in the calculation of resistances and currents of branched electrical circuits, the necessity of building an equivalent circuit and a critical assessment of the obtained numerical result are indicated, as well as the importance of solving it firstly in a general (parametric) form. The authors consider tasks with the possibility of both the complete analytical solution and the numerical one of a system of linear equations where the parametric solution is unreasonably cumbersome and could lead to mathematical errors. In the considered examples the algorithm for compiling and solving a system of equations is explained in detail, the application of which is optimal in the conditions of each specific task.*

Keywords: *Kirchhoff's laws, mixed connection, measuring bridge, bypass direction.*

Статья поступила в редакцию 30.10.2022;
одобрена после рецензирования 29.11.2022;
принята к публикации 06.12.2022.

The article was submitted 30.10.2022;
approved after reviewing 29.11.2022;
accepted for publication 06.12.2022.