№ 2 (4) / 2022
июль

УДК
372.851:510.254

КАЛИНИНГРАДСКИЙ
ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический
электронный журнал

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

Поткина Анастасия Андреевна | nst180493@mail.ru
Магистрант Института физико-математических наук
и информационных технологий
Балтийский федеральный университет им. И. Канта
Калининград, Россия

Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы

Аннотация. *Для реализации одного из основных требований ФГОС — умение применять полученные знания в реальной жизни — наиболее подходят текстовые задачи. Различные контекстные задачи позволяют школьникам решать жизненные проблемы с помощью предметных знаний. Дети самостоятельно добывают информацию, анализируют, делают выводы. Решение задач тесно связано со способностью самостоятельно и логически мыслить, а также применять различные методы и этапы математического моделирования. Интересное и приближенное к жизненным ситуациям содержание задач делает их актуальными для учащихся.*

Данная статья посвящена методам решения различных текстовых задач на смеси, сплавы. Рассматриваются как стандартный алгебраический метод решения с добавлением «наглядности», так и более необычные: метод креста, «рыбка», а также графический и на расклеенных осях. Приводятся решения с применением методов на задачах из открытого банка заданий ОГЭ. Отдельно рассматривается решение каждым методом задач на высушивание как одного из наиболее интересных подтипов текстовых задач на смеси и сплавы. Несколькими методами решены задачи с смешиванием более двух активных веществ, что служит прототипом задач на многократное разбавление.

Ключевые слова: *текстовые задачи, смеси, сплавы, растворы, алгебраический метод, метод «рыбка», графический метод, метод креста.*

Одно из основных требований ФГОС к учащимся — умение применять полученные знания в реальных жизненных ситуациях.

Для реализации данного требования наиболее подходят текстовые задачи. Различные контекстные задачи позволяют школьникам решать жизненные проблемы с помощью предметных знаний. Дети самостоятельно добывают информацию, анализируют ее, делают выводы.

№ 2 (4) / 2022
июль

УДК
372.851:510.254

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический электронный журнал

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

Текстовые задачи — это сформулированный словами вопрос, описание конкретной ситуации обычным языком, дополненное требованиями дать количественную характеристику компонентов ситуации, установить отношения между этими компонентами. Решение задач тесно связано со способностью самостоятельно и логически мыслить, а также применять различные методы математического моделирования. Также это один из основных видов деятельности на уроках математики, поэтому интересное и приближенное к жизненным ситуациям содержание задач делает их актуальными для учащихся.

Текстовые задачи делятся на группы, объединенные либо методом решения, либо схожим сюжетом, либо количеством действий, которые необходимо выполнить для решения задачи. Рассмотрим классификацию сюжетных задач (*рисунок 1*).

Рисунок 1 — Классификация текстовых задач

Каждый из типов задач интересен по-своему и имеет как классические, так и нестандартные методы решения. Одни из наиболее сложных задач, встречающихся как на ОГЭ, ЕГЭ, так и в ВПР старших классов — это задачи на смеси, сплавы. Они относятся как к практическим, так и к межпредметным, затрагивая области смежных наук — таких, как химия, физика.

В курсе математики недостаточно полно рассматривается тема решения прикладных задач. Конечно, все задачи практического содержания рассмотреть невозможно, но можно и необходимо научить школьников пользоваться как основными методами и алгоритмами, так и нестандартными.

Некоторые основные способы решения:
1) алгебраический;
2) метод чаш;
3) метод «рыбка»;
4) метод креста (квадрат Пирсона);

5) на расклеенных осях;
6) графический.

Рассмотрим на примерах задач из ОГЭ каждый метод решения более подробно. Продемонстрируем решение различными методами важного типа задач — на «высушивание».

Алгебраический метод решения подразумевает создание математической модели и решение уравнения (системы уравнений).

Задача 1. *В сплаве содержится 5 % золота, в другом — 11 % золота. Масса первого меньше массы второго на 4 кг. Из них получили третий сплав, содержащий 10 % золота. Найдите массу третьего сплава* [2, с. 64].

Решение. Пусть масса первого сплава *x* кг. Тогда масса второго сплава *(x + 4)* кг, а третьего — *(2x + 4)* кг. Известно, что в первом сплаве содержание золота *0,05 × x* кг, во втором — *0,11 × (x + 4)* кг. В третьем сплаве содержится *0,1 × (2x + 4)* кг золота, составим и решим уравнение:
$0{,}05 \times x + 0{,}11 \times (x + 4) = 0{,}1 \times (2x + 4)$;
$0{,}04 \times x = 0{,}04$;
$x = 1$.
Масса третьего сплава $2 \times x + 4 = 6$ кг.
Ответ: 6 кг масса сплава.

Задача 2. *Два сосуда содержат 10 кг и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить, то полученный раствор будет содержать 55 % кислоты. Если слить равные массы растворов, то полученный раствор будет содержать 61 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?*

Решение. Пусть концентрация первого раствора — *x*, концентрация второго раствора — *y*. Составим систему уравнений согласно условию задачи и решим ее:

$$\begin{cases} 10x + 16y = (10+16) \times 0{,}55, \\ x + y = 2 \times 0{,}61; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 16y = 14{,}3, \\ 10x + 10y = 12{,}2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0{,}87, \\ y = 0{,}35. \end{cases}$$

Значит, в первом растворе содержится $0{,}87 \times 10 = 8{,}7$ кг.
Ответ: 8,7 кг кислоты в первом растворе.

Задача 3. *Свежий виноград содержит 80 % воды, а изюм — 10 %. Сколько надо взять винограда, чтобы получить 6 кг изюма?* [5, с. 64].

Решение. Определим количество сухого вещества. В свежем винограде — 20 %, в изюме — 90 %.
Масса сухого вещества в 6 кг изюма:
$6 \times 0{,}9 = 5{,}4$ кг.
Такая же масса была и в винограде, значит $5{,}4 \times 0{,}2 = 27$ кг.
Ответ: 27 кг.

Метод чаш. Метод является аналогом алгебраического метода, включая лишь элемент наглядности. Изображаем каждый раствор (сплав, смесь) в виде прямоугольника / стакана, разбитого на части.

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

После получившиеся части заполняются по условию задачи. Составляется и решается уравнение (система уравнений).

Задача 4. *Имеются два сосуда, которые содержат 5 кг и 8 кг раствора кислоты разной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 52,5 % кислоты. Если брать равные массы растворов, то полученный будет содержать 45 % кислоты. Какое процентное содержание кислоты в первом растворе?* [2, с. 62].

Решение задачи представлено на *рисунке 2.*

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2 \times 0{,}525, \\ 5x + 8y = 13 \times 0{,}45; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1{,}05 - x, \\ 5x + 8\,(1{,}05 - x) = 5{,}85; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0{,}85, \\ y = 0{,}2. \end{cases}$$

Ответ: 85 % кислоты.

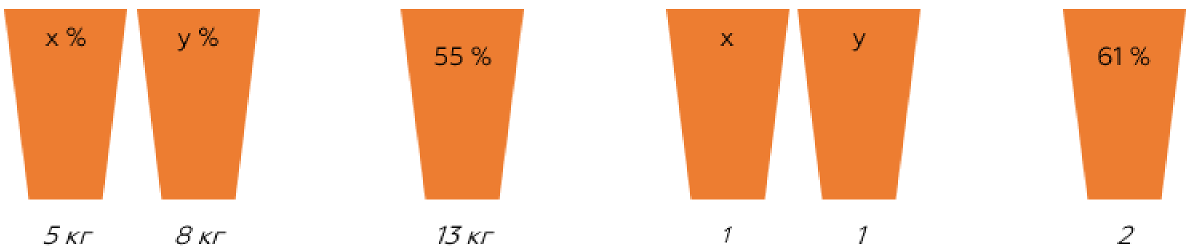


Рисунок 2 — Решение задачи 4 методом чаш

Задача 5. *В двух сплавах различное содержание серебра: в первом содержится 60 %, а во втором — 45 %. В каком отношении надо взять сплавы, чтобы получить из них новый, содержащий 55 % серебра?* [5, с. 110].

Решение задачи представлено на *рисунке 3.*

По условию задачи составим и решим уравнение:

$$0{,}6 \times x + 0{,}45 \times y = 0{,}55 \times (x + y);$$
$$x = 2 \times y.$$

Ответ: сплавы необходимо взять в отношении 2 к 1.

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

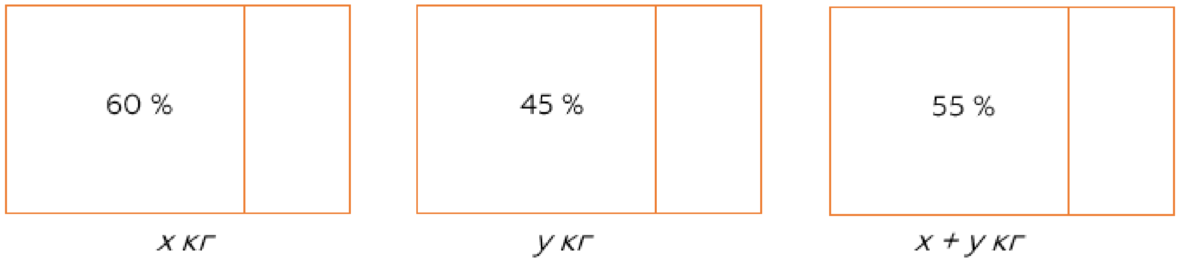


Рисунок 3 — Решение задачи 5 методом чаш

Задача 6. *8 кг свежих цветков розы содержат 85 % воды. После высушивания их влажность составляет 20 %. Чему равна масса цветов после сушки?* [Там же. С. 162].

Решение задачи представлено на *рисунке 4*.

По условию задачи составим и решим уравнение:

$8 \times (1 - 0{,}85) = x \times 0{,}8;$
$x = 1{,}5.$

Ответ: масса высушенных цветов 1,5 кг.

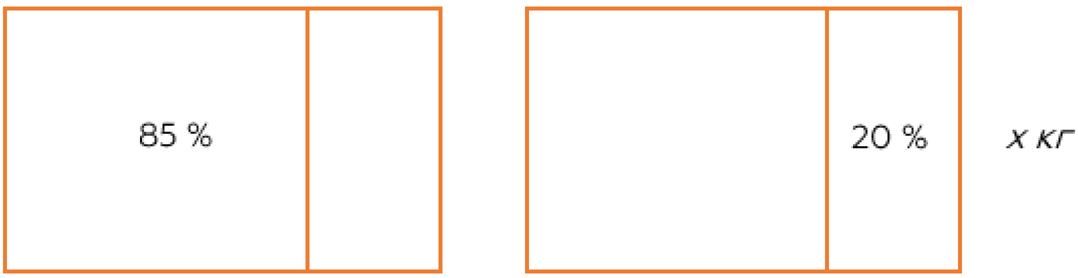


Рисунок 4 — Решение задачи 6 методом чаш

Квадрат Пирсона (иначе **метод креста, конверт Пирсона**). Метод предложен знаменитым английским математиком Карлом (Чарльзом) Пирсоном (1857–1936).

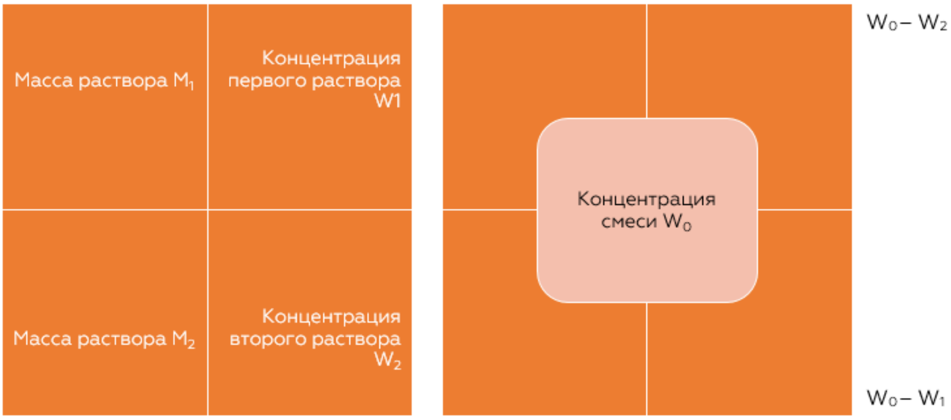
Концентрации растворенного вещества записывают друг под другом и рассматривают пары чисел. В каждой паре из большего числа вычитают меньшее и результаты записывают по диагонали. Затем находят равенство отношений масс и полученных долей. Схема представлена на *рисунке 5*.

№ 2 (4) / 2022
июль

УДК
372.851:510.254

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический электронный журнал

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/



$$\frac{w_0 - w_2}{w_0 - w_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

Рисунок 5 — Метод креста (квадрат Пирсона)

Задача 7. *При смешивании двух растворов кислоты, концентрации которых 30 %, и 50 %, получили раствор, содержащий 45 % кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?* [2, с. 61].

Решение задачи представлено на *рисунке 6*.

Составим пропорцию:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: растворы были взяты в отношении 1 к 3.

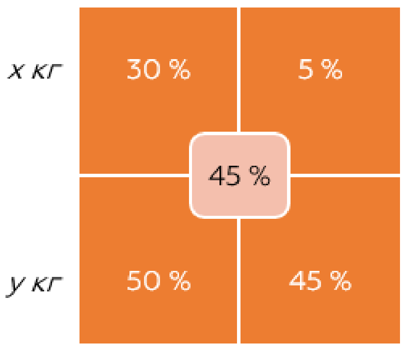


Рисунок 6 — Решение задачи 7 методом креста

№ 2 (4) / 2022
июль

УДК
372.851:510.254

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический электронный журнал

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

Задача 8. *Смешали некоторое количество 21-процентного раствора с таким же количеством 95-процентного раствора этого же вещества. Какова концентрация полученного раствора?* [5, с. 168].

Решение задачи представлено на *рисунке 7.*

Составим и решим пропорцию:

$$\frac{1}{1} = \frac{x-95}{21-x};$$

x = 58 %.

Ответ: 58 % концентрация смеси.

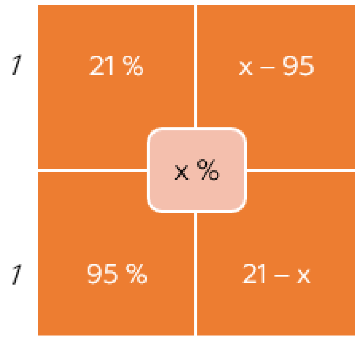


Рисунок 7 — Решение задачи 8 методом креста

Задача 9. *Свежие грибы содержат 80 % воды, сушеные — 28 %. Сколько сухих грибов получается из 288 кг свежих?* [2, с. 64].

Решение. Определяем содержание мякоти и составляем модель (*рисунок 8*).

Составим уравнение:

72 × x = 20 × 288;
x = 80.

Ответ: 80 кг сухих фруктов.

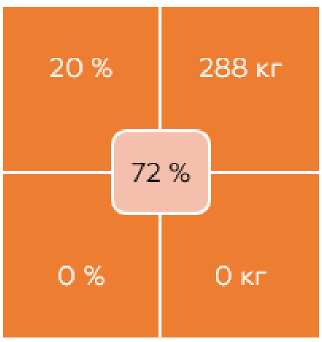


Рисунок 8 — Решение задачи 9 методом креста

№ 2 (4) / 2022
июль

УДК
372.851:510.254

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический
электронный журнал

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

Задача 10. *0,5 т дыни содержит 85 % воды. После выпаривания получают массу с 25 % содержанием дыни. Сколько килограммов воды выпарено?*

Решение. Определяем содержание твердого вещества и составляем модель (*рисунок 9*).

Составим и решим пропорцию:

$$\frac{0{,}5}{x} = \frac{25}{10};$$

x = 0,2.

Ответ: было выпарено 0,2 т воды.

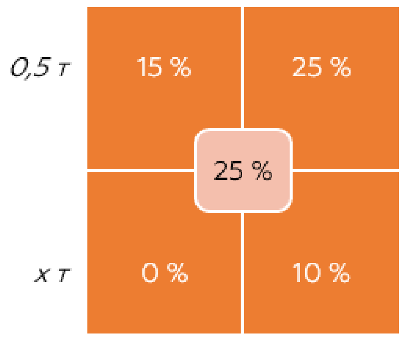


Рисунок 9 — Решение задачи 10 методом креста

Задача 11. *Свежие сливы содержат 80 % воды, а чернослив — 10 %. Сколько надо взять сливы, чтобы получилось 6 кг сухофруктов?* [5, с. 183].

Решение. Определяем содержание мякоти и составляем модель (*рисунок 10*).

Составим и решим уравнение:

90 × 6 = 20 × x;
x = 27.

Ответ: 27 кг свежих слив.

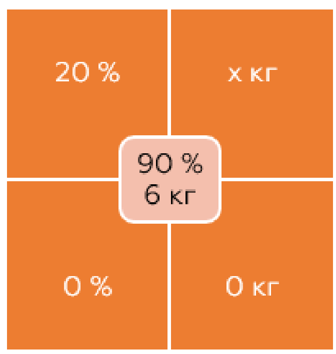


Рисунок 10 — Решение задачи 11 методом креста

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

Метод «рыбка». Данный способ решения задач был описан русским математиком Леонтием Филипповичем Магницким (1669–1739). При решении задач строится схема, которая напоминает рыбу. Принцип действия похож на квадрат Пирсона, является адаптированным аналогом.

Состоит метод «рыбки» в следующем: друг под другом фиксируются содержания веществ, имеющихся растворов (сплавов), слева посередине — содержание вещества в растворе (сплаве), который должен получиться после смешивания. Затем составляем и решаем пропорцию отношения масс растворов и долей растворов в конечно сплаве. Схема представлена *на рисунке 11* [4].

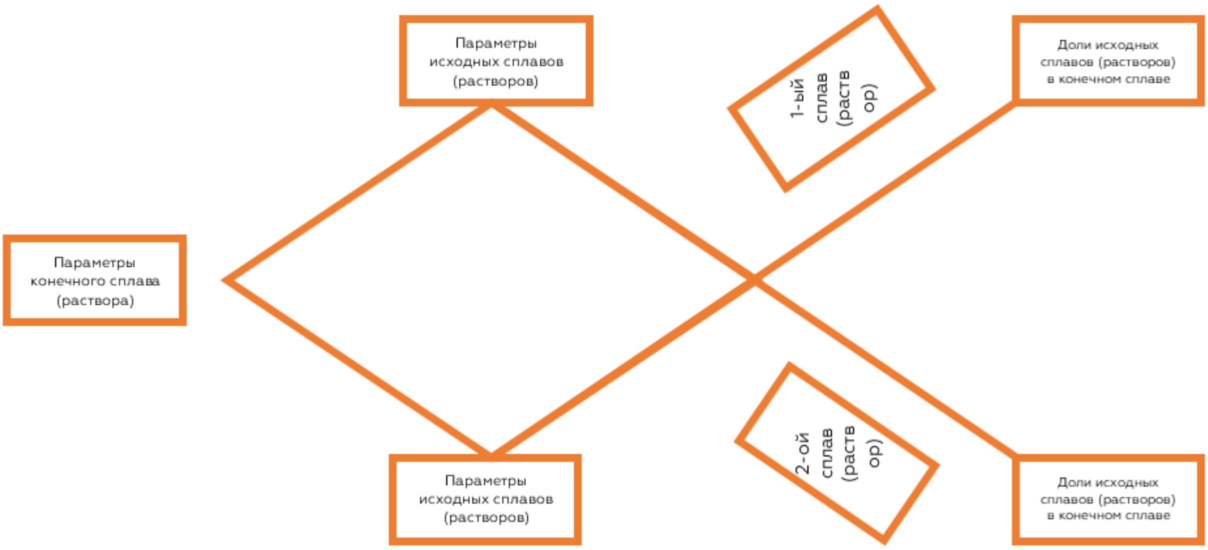


Рисунок 11 — Схема метода «рыбка» (по И. В. Огрызко)

Задача 12. *При смешивании двух растворов кислоты, концентрация которых 20 %, и 50 %, получают раствор, который содержит 30 % кислоты. В каком отношении были взяты растворы?* [2, с. 59].

Решение задачи представлено на *рисунке 12.*

x : y = 20 : 10.

Ответ: растворы были взяты в отношении 2 к 1.

№ 2 (4) / 2022
июль

УДК
372.851:510.254

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический электронный журнал

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

Рисунок 12 — Решение задачи 12 методом «рыбка»

Задача 13. *Первый сплав содержит 5 % алюминия, второй — 13 %. Масса первого меньше массы второго сплава на 4 кг. Был получен третий сплав с содержанием алюминия 10 %. Найти массу третьего сплава* [3].

Решение задачи представлено на *рисунке 13*.

Составим пропорцию:

$$\frac{1}{1} = \frac{x-95}{21-x};$$

Решим 5 × x = 3 × (x + 4);
x = 6 кг — масса первого сплава.
Масса первого сплава на 4 меньше, значит = 10 кг.
Масса третьего сплава 10 + 6 = 16 кг.
Ответ: 16 кг.

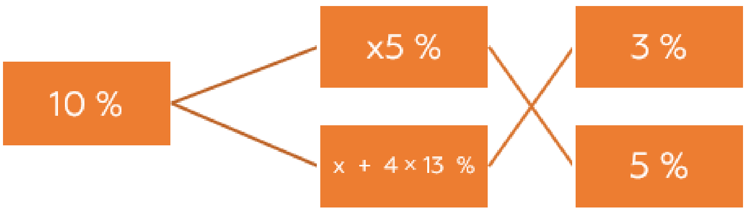


Рисунок 13 — Решение задачи 13 методом «рыбка»

Задача 14. *Свежие фрукты содержат 78 % воды, а высушенные — 22 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 22 кг высушенных фруктов?* [5, с. 188].

Решение. Определяем содержание мякоти веществ и составляем модель (*рисунок 14*).

Составим уравнение:

78 × 22 = 22 × x + 0;
x = 78.

Ответ: 78 кг свежих фруктов необходимо.

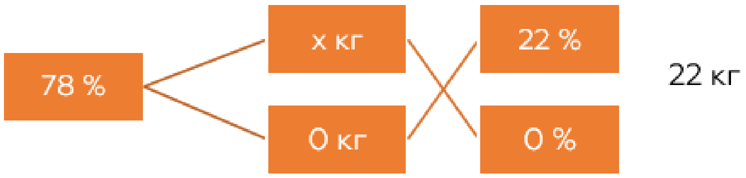


Рисунок 14 — Решение задачи 14 методом «рыбка»

Метод на расклеенных осях заключается в рассмотрении подобных фигур, образовавшихся при построении графиков. Строим функциональную зависимость массовой доли растворенного вещества в смеси от массы смешанных растворов в обратной пропорциональной зависимости. Условные обозначения изображены на *рисунке 15*.

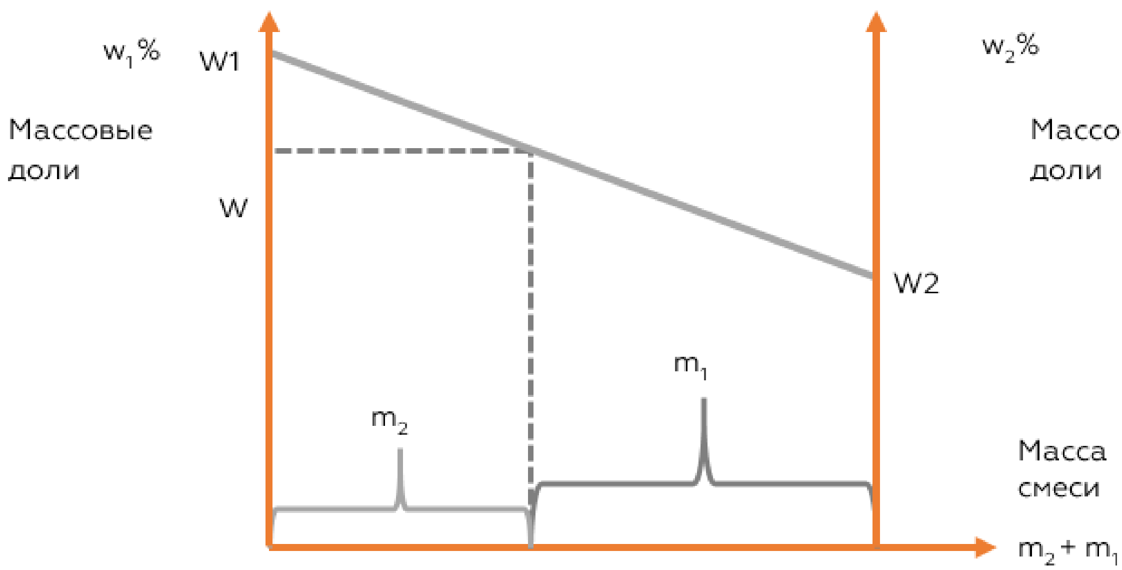


Рисунок 15 — Метод на расклеенных осях

№ 2 (4) / 2022
июль

УДК
372.851:510.254

КАЛИНИНГРАДСКИЙ
ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический
электронный журнал

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

Задача 15. *Смешали растворы 300 г с концентрацией кислоты 10 % и 100 г с концентрацией кислоты 20 %. Определить концентрацию раствора* [2, с. 62].

Решение задачи представлено на *рисунке 16*.

При рассмотрении подобных треугольников ABF и EDF, имеем:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{AF}{EF};$$

$$\frac{10}{x} = \frac{400}{100};$$

x = 12,5 %.

Ответ: 12,5 % концентрация итогового раствора.

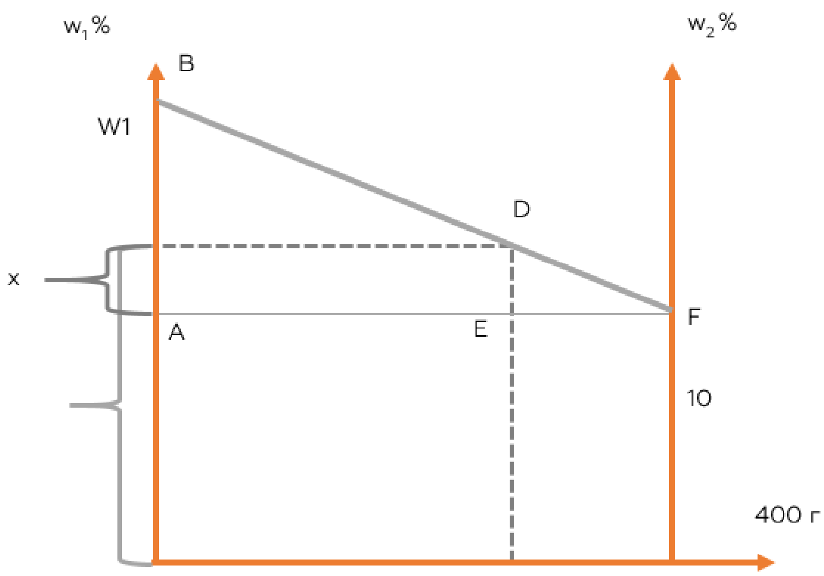


Рисунок 16 — Решение задачи 15 методом на расклеенных осях

Графический метод заключается в использовании площадей равновеликих прямоугольников.

Задача 16. *Смешивают 30 % раствор азотной кислоты с 10 % раствором и получают 600 г — 15 % раствора. Какие массы растворов необходимо взять?* [1, с. 267].

Решение приводится на *рисунке 17*.
15 × x = 5 × (600 – x);
x = 150.
Ответ: 150 г 30 % и 450 г 10 % раствора.

№ 2 (4) / 2022
июль

УДК
372.851:510.254

КАЛИНИНГРАДСКИЙ
ВЕСТНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Научно-методический
электронный журнал

Поткина А. А. Методы решения текстовых задач на смеси и сплавы // Научно-методический электронный журнал «Калининградский вестник образования». — 2022. — № 2 (14) / июль. — С. 30-45. — URL: https://koirojournal.ru/realises/g2022/05jul2022/kvo104/

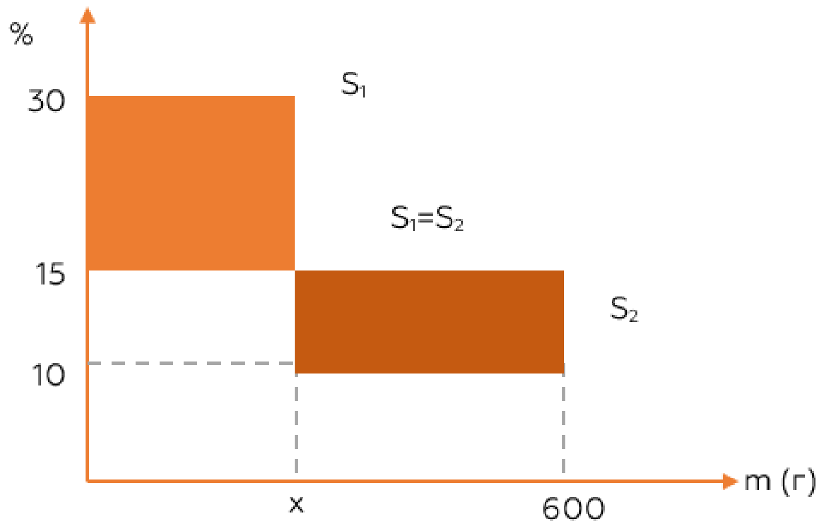


Рисунок 17 — Решение задачи 16 графическим методом

Рассмотренные задачи являются базовыми среди сюжетных задач на смеси, растворы, сплавы. Так же можно решать задачи на многократное разбавление, смешение более двух веществ. Приведем пример задачи и решим ее методом квадрата Пирсона.

Задача 17. *Взяли два раствора кислоты с процентным содержанием 60 % и 30 % кислоты. После добавления 5 кг чистой воды получили 20 % раствор кислоты. Если вместо 5 кг воды добавить 5 кг 90 % раствора кислоты, то получим 70 % раствор. Сколько килограммов 60 % раствора использовали?* [2, с. 65].

Решение задачи представлено на *рисунке 18.*

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} -40x - 10y + 100 = 0, \\ 10x + 40y - 100 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: необходимо взять 2 кг 60 % раствора.

Рисунок 18 — Решение задачи 17 методом креста

Задача 18. *Имеется три раствора кислоты. 5 %, 8 % и 12 %. В каких долях необходимо смешать эти растворы, чтобы получить 6 % раствор?* [3].

Решение. Приведем решение методом «рыбка» (*рисунок 19*).

6 + 2 = 8 частей — 5%-й раствор,

1 часть — 12 % и 8 %.

Ответ: растворы необходимо взять в отношении 8:1:1.

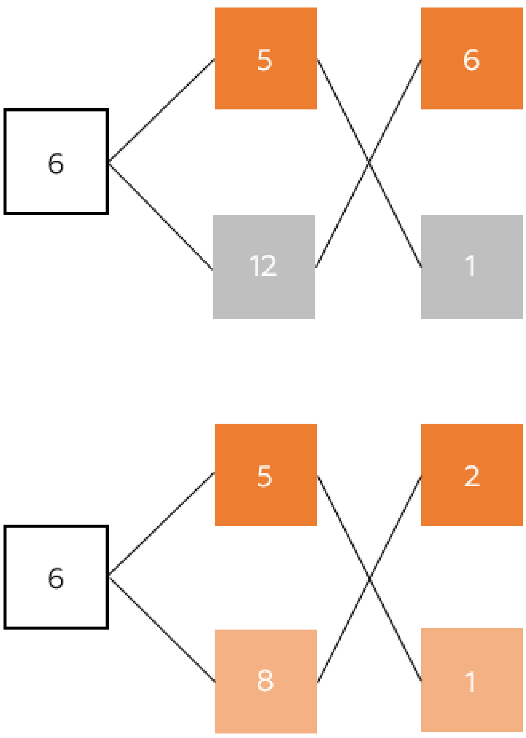


Рисунок 19 — Решение задачи 18 методом «рыбка»

Как видим, решения простые, лаконичные. Таким образом, среди основных преимуществ представленных в статье методов можно выделить следующие:

– их могут использовать те учащиеся, которые не умеют решать уравнения;
– они просты в объяснении;
– применимы для различных сценариев задач.

Проводя анализ различных методов при решении одной и той же задачи, выясняем, что алгебраический метод наиболее «объемный», соответственно более трудоемкий. Если учащиеся на достаточном уровне усвоили схемы метода Пирсона и Магницкого, то на решение аналогичных задач уходит меньше времени, а также важно отметить, что с заданием справляются и достаточно «слабые» учащиеся, для которых представляет трудность составление уравнений, систем уравнений.

Наиболее интересны, на взгляд автора, методы «на расклеенных осях» и графический с использованием площадей. Школьники достаточно быстро усваивают материал в необычной подаче. Однако данные методы усваиваются учениками, обладающими должной подготовкой по темам геометрии, имеющими представление о простейших подобных фигурах.

Список литературы

1. Алгебра. 8 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений / С. М. Никольский [и др.]. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 2006. — 287 с.
2. Ахтямова, Л. Н. Методика обучения учащихся решению задач на проценты в курсе алгебры основной школы: выпускная квалификационная работа: 44.03.05 / Ахтямова Лидия Николаевна. — Тольятти, 2016. — 71 с.
3. Задачи ЕГЭ на сплавы, смеси, растворы [Электронный ресурс] // ЕГЭ-Студия. — URL: https://ege-study.ru/zadachi-ege-na-splavy-smesi-rastvory/ (дата обращения: 25.04.2022).
4. Огрызко, И. В. Решение задач на смеси и сплавы методом Магницкого [Электронный ресурс] / И. В. Огрызко // Мультиурок — проект для учителей. — URL: https://multiurok.ru/files/rieshieniie-zadach-na-smiesi-i-splavy-mietodom-mag.html (дата обращения: 25.04.2022)
5. ОГЭ. Математика. Типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под. ред. И. В. Ященко. — М.: Издательство «Национальное образование», 2016. — 240 с.

Anastasia A. Potkina
Immanuel Kant Baltic Federal University
Kaliningrad, Russia

Methods of solving text tasks about mixtures and alloys

Abstract. *To implement one of the main requirements of the Federal State Educational Standard — the ability to apply the knowledge gained in real life — text tasks are the most suitable. Various contextual* *tasks allow students to solve life problems with the help of subject knowledge. Children extract independently information, analyze it and draw conclusions. Problem solving is closely related to the ability of thinking independently and logically as well as applying various methods and stages of mathematical modeling. The interesting and close to real life situations content of tasks makes them relevant for students.*

This article is devoted to methods of solving different text tasks about mixtures and alloys.

The article considers as both the standard algebraic method of solution with the addition of "visualization" and more unusual ones: cross method, "fish" method, graphic method and spliced axle method.

The article provides solutions with the usage of methods on the tasks from the open storage of Main State exam (OGE). Separately the drying is considered in each method as one of the most interesting subtype of text tasks about mixtures and alloys.

The tasks about mixing more than two active substances using several methods are solved. It represents a prototype for multiple dilution tasks.

Keywords: *text tasks, mixtures, alloys, solutes, algebraic method, "fish" method, graphic method, cross method.*

Статья поступила в редакцию 04.04.2022;
одобрена после рецензирования 01.05.2022;
принята к публикации 06.06.2022.

The article was submitted 04.04.2022;
approved after reviewing 01.05.2022;
accepted for publication 06.06.2022.